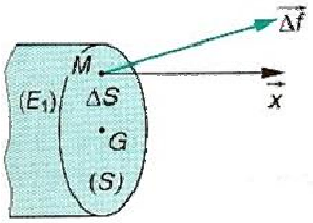
RESISTANCE DES MATERIAUX

Notion de contrainte

1 – PREAMBULE

Le torseur de cohésion permet d'exprimer au centre d'une section droite les actions mécaniques internes exercées par un tronçon sur l'autre mais il ne permet pas de définir la **répartition de ces efforts dans la surface** de la section. Pour cela, on fait appel à la notion de **contrainte**…

2 – DEFINITION DE LA CONTRAINTE



Prenons un point M appartenant à la surface (S) de la section droite de la poutre au niveau de la coupure de centre G. Prenons une surface élémentaire Δs qui entoure le point M. Sur cette surface élémentaire Δs s'applique une force élémentaire $\overrightarrow{\Delta f}$.

Il va de soit que si on additionne toutes les forces élémentaires $\overrightarrow{\Delta f}$, on obtient la force totale qu'exerce la partie droite sur la partie gauche, c'est à dire la résultante du torseur de cohésion :

$\overrightarrow{R_{coh}} = \sum \overrightarrow{\Delta f}$ ou encore $\overrightarrow{R_{coh}} = \int_S \overrightarrow{df}$

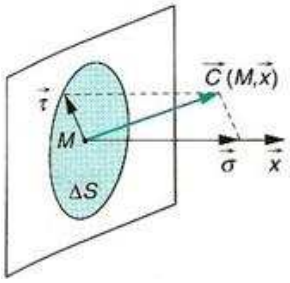
On appelle vecteur contrainte au point M relativement à la surface Δs de normale $\vec{x}$ le vecteur $\overrightarrow{C(M,\vec{x})}$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{C(M,\vec{x})} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{df}}{ds}}$$

Unité légale : La contrainte étant le rapport d'une force par une surface, l'unité légale est donc le $N \cdot m^2$, donc le Pa.

Unité pratique : En RDM, on utilise souvent le MPa avec : $1\,MPa = 10^6\,Pa = 1\,N \cdot mm^2$

3 – COMPOSANTES NORMALE ET TANGENTIELLES



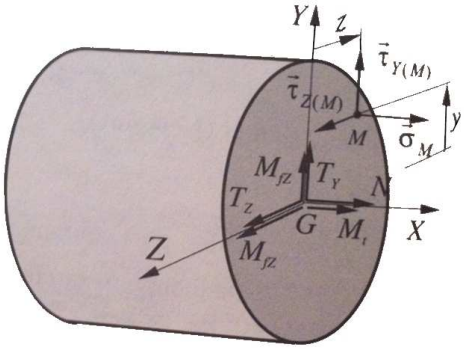
Dans le cas générale, la force élémentaire $\overrightarrow{\Delta f}$ a une orientation quelconque et en conséquence il en va de même pour le vecteur contrainte $\overrightarrow{C(M,\vec{x})}$.

Aussi, on peut décomposer le vecteur contrainte $\overrightarrow{C(M,\vec{x})}$ avec :

- Une composante perpendiculaire à la surface Δs, appelée **composante normale** et notée $\vec{\sigma}$.
- Une composante comprise dans la surface Δs, appelée **composante tangentielle** et notée $\vec{\tau}$.

Ainsi, le vecteur contrainte s'écrit : $\overrightarrow{C(M,\vec{x})} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$ ou encore : $\boxed{\overrightarrow{C(M,\vec{x})} = \sigma \cdot \vec{x} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}}$

4 – RELATIONS GENERALES ENTRE CONTRAINTES ET EFFORT DE COHESION



Prenons un point M dans la section droite d'abscisse $G(x)$.

Prenons une surface élémentaire ds autour du point M.

Sur cette surface élémentaire la partie droite exerce sur la partie gauche une force de cohésion élémentaire $\overrightarrow{df}$.

Sous forme de torseur, en M, on a : $\{dT_{coh}\} = {}_M\begin{Bmatrix} \overrightarrow{df} = \vec{C} \cdot ds \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{(M,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Transporté en G, on a : $\{dT_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{df} = \vec{C} \cdot ds \\ \overrightarrow{dM_G}(\overrightarrow{df}) = \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{df} = \overrightarrow{GM} \wedge \vec{C} \cdot ds \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

avec $\overrightarrow{GM} = y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$ et $\vec{C} = \sigma \cdot \vec{y} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$

soit, $\{dT_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \sigma \cdot ds & (y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y) \cdot ds \\ \tau_y \cdot ds & z \cdot \sigma \cdot ds \\ \tau_z \cdot ds & y \cdot \sigma \cdot ds \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Par identification avec le torseur des efforts de cohésion $\{T_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & M_t \\ \tau_y & M_{fy} \\ \tau_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

on obtient les **relations fondamentales** suivantes :

$N = \int_S \sigma \cdot ds$ (1)	$M_t = \int_S (y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y) \cdot ds$ (4)
$T_y = \int_S \tau_y \cdot ds$ (2)	$M_{fy} = \int_S z \cdot \sigma \cdot ds$ (5)
$T_z = \int_S \tau_z \cdot ds$ (3)	$M_{fz} = \int_S y \cdot \sigma \cdot ds$ (6)

- Ces relations seront utilisées dans les études des différents cas de sollicitations.
- Elles ne sont pas directement utiles pour résoudre des problèmes de RDM.